УДК 519.6

МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.М. Карчевский

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: Mikhail.Karchevsky@ksu.ru

Аннотация

Построен и исследован многосеточный метод, основанный на непосредственном использовании (без предварительной линеаризации) простейших операторов сглаживания Якоби для уравнения с дивергентной несамосопряженной положительно определенной главной частью и слабой нелинейностью. Для аппроксимации краевой задачи использован конечноэлементный метод с произвольными конформными (вообще говоря, криволинейными) элементами. Сначала подробно исследован соответствующий двусеточный метод. Затем установлена сходимость W-цикла многосеточного метода, со скоростью, не зависящей от параметра триангуляции.

Ключевые слова: Многосеточный метод, двусеточный метод, квазилинейное уравнение, метод конечных элементов, скорость сходимости

Введение

Многосеточные методы принадлежат в настоящее время к наиболее экономичным способам численного решения дифференциальных уравнений с частными производными. Построению и исследованию различных вариантов многосеточных методов посвящена обширная литература (см., например, [1–4]). К числу наиболее изученных с этой точки зрения принадлежат эллиптические уравнения с самосопряженными положительно определенными операторами второго порядка.

Что касается уравнений с нелинейными операторами, то теория многосеточных методов для этих задач развита значительно слабее. Обычно здесь рассматриваются методы, основанные на линеаризации задачи (например, по методу Ньютона), и последующем применении на каждом шаге итераций какого-либо варианта многосеточной процедуры.

В настоящей лекции, составленной по материалам работ автора [5, 6], конструируется и исследуется многосеточный метод, основанный на непосредственном использовании (без предварительной линеаризации) простейших операторов сглаживания Якоби для уравнения с дивергентной несамосопряженной положительно определенной главной частью и слабой нелинейностью.

Для аппроксимации краевой задачи используется конечноэлементный метод с произвольными конформными (вообще говоря, криволинейными) элементами.

Сначала подробно исследуется соответствующий двусеточный метод. Затем стандартным образом выводится сходимость так называемого W-цикла многосеточного метода, со скоростью, не зависящей от h (параметра триангуляции). Применяемая нами методика построения и исследования многосеточного итерационного метода наиболее близка к [3].

1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для слабонелинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида

$$-\operatorname{div}(A\nabla u + ub) + a\cdot\nabla u + f(x,u) = 0, \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x\in\Gamma, \tag{2}$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область, $n=2,\ 3$, Γ – граница области Ω,

$$A = A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1}^n,\ a = a(x) = (a_i(x))_{i=1}^n,\ b = b(x) = (b_i(x))_{i=1}^n.$$

Здесь и далее $x\cdot y = \sum\limits_i x_i y_i$ – стандартное скалярное произведение в конечномерном арифметическом пространстве векторов. Через $L_2(\Omega)$ обозначаем гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v) = \int\limits_\Omega uv dx,$$

$\|u\| = (u,u)^{1/2}$,$H^m(\Omega)$ – пространство Соболева функций, имеющих обобщенные производные на Ω из $L_2(\Omega)$ вплоть до порядка $m \geqslant 1$, $H_0^1(\Omega)$ – подпространство $H^1(\Omega)$, получающееся замыканием линейного пространства гладких финитных на Ω функций в норме $H^1(\Omega)$.

Как обычно, под обобщенным решением задачи (1), (2) будем понимать такую функцию $u \in H_0^1(\Omega)$, что

$$\mathbf{a}(u,v) + \mathbf{f}(u,v) = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{3}$$

где

$$\mathbf{a}(u,v) = \int\limits_{\Omega} (A\nabla u \cdot \nabla v + ub \cdot \nabla v + va \cdot \nabla u) dx \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\mathbf{f}(u,v) = \int\limits_{\Omega} f(x,u) v dx \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{4}$$

Будем предполагать, что матрица $A(x)$ симметрична при любом $x \in \Omega$ и равномерно положительно определена, т. е.

$$A(x)t \cdot t \geqslant c_0 |t|^2, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega,\ c_0 = \text{const} > 0.$$

Будем предполагать также, что выполнены условия (см. [7,8]), обеспечивающие положительную определенность и ограниченность билинейной формы $\mathbf{a}$ на $H_0^1(\Omega)$:

$$\mathbf{a}(u,u) \geqslant c_1 \|u\|_1^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{5}$$

$$|\mathbf{a}(u,v)| \leqslant c_2 \|u\|_1 \|v\|_1 \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega), \tag{6}$$

$c_1, c_2 = \text{const} > 0$,

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

.

Оценки (5), (6), например, выполняются, если все коэффициенты a_{ij}, a_i, b_i принадлежат $L_\infty(\Omega)$, $a_0(x) \geqslant 0$, $x \in \Omega$, а величина $\|a\|_{L_\infty(\Omega)} + \|b\|_{L_\infty(\Omega)}$ достаточно мала.

Нетрудно показать, что условие (5) выполняется и без ограничений на величину $\|a\|_{L_\infty(\Omega)} + \|b\|_{L_\infty(\Omega)}$, если a_i, b_i, принадлежат $C^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, $a_0 - \operatorname{div}(a+b) \geqslant 0$ на Ω.

Будем считать также, что функция $f(x,p)$ непрерывна по $x \in \bar{\Omega}$ при любом $p \in \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируема по p и

$$0 \leqslant \frac{\partial f(x,p)}{\partial p} \leqslant c_3 \quad \forall x \in \bar{\Omega},\ p \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$c_3 = \mathrm{const}$.

Хорошо известно (см., например, [7, 8]), что при выполнении условий (5)–(7) задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение.

В дальнейшем дополнительно к (5), (6) будем предполагать, что выполнены так называемые условия регулярности, т. е. a_i, b_i, a_{ij}, $i, j = 1, \dots, n$, принадлежат $C^1(\overline{\Omega})$, Γ – поверхность класса C^2.

2. Метод конечных элементов. Свойства конечномерных операторов

Пусть $\mathcal{T}_h$ – конформная регулярная триангуляция области Ω, удовлетворяющая так называемому обратному предположению (см., например, [9, 10]). Пусть, далее, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ – конечноэлементное пространство такое, что для любой функции $u \in H^2(\Omega)$ существует функция $u_h \in V_h$, удовлетворяющая условию[1]

$$\|u - u_h\|_1 \leqslant ch\|u\|_2. \tag{8}$$

Предполагается также выполненным обратное неравенство

$$\|v\|_1 \leqslant ch^{-1}\|v\| \quad \forall\, v \in V_h. \tag{9}$$

В дальнейшем предполагается, что в пространстве V_h фиксирован некоторый базис. Через v^h будем обозначать вектор координат функции $v \in V_h$ в выбранном базисе. Для регулярной триангуляции справедливы неравенства

$$c^{-1}h^n v^h \cdot v^h \leqslant \int\limits_{\Omega} v^2 dx \leqslant ch^n v^h \cdot v^h \tag{10}$$

Описание способов построения конечноэлементных пространств V_h, удовлетворяющих условиям (8)–(10) см., например, в [9, 10].

[1] Далее через $c, c_1, \dots$ обозначаются постоянные, не зависящие от параметра триангуляции h.

Под приближенным решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $y \in V_h$ такую, что

$$\mathbf{a}(y, v) + \mathbf{f}(y, v) = 0 \quad \forall\, v \in V_h. \tag{11}$$

Если условия (5)–(7) выполнены, то задача (11) имеет единственное решение, поскольку соответствующий конечномерный оператор, действующий в конечномерном пространстве V_h, как нетрудно убедиться, является сильно монотонным и липшиц-непрерывным относительно нормы $H_0^1(\Omega)$.

При исследовании многосеточного итерационного метода решения задачи (11) нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Лемма 1 *Пусть $y \in V_h$. Положим*

$$\|y\|_{2,h} = \sup_{v \in V_h,\ v \neq 0} \frac{\mathbf{a}(y, v)}{\|v\|}, \quad \|y\|_{2,h}^* = \sup_{v \in V_h,\ v \neq 0} \frac{\mathbf{a}(v, y)}{\|v\|}. \tag{12}$$

Существует такая, не зависящая от h постоянная c, что

$$\|y\|_{2,h}^* \leqslant c\|y\|_{2,h} \quad \forall y \in V_h. \tag{13}$$

Доказательство. По определению

$$\mathbf{a}(y, v) - \mathbf{a}(v, y) = \int_\Omega (a \cdot \nabla y v - a \cdot \nabla v y + b \cdot \nabla v y - b \cdot \nabla y v) dx,$$

откуда, применяя формулу интегрирования по частям, а затем неравенство Коши – Буняковского, получим

$$|\mathbf{a}(y, v) - \mathbf{a}(v, y)| \leqslant c\|\nabla y\|\|v\|, \tag{14}$$

следовательно, $\|y\|_{2,h}^* \leqslant c(\|y\|_{2,h} + \|\nabla y\|)$, причем вследствие условия (5) и неравенства Фридрихса для $y \neq 0$ имеем

$$\|\nabla y\| \leqslant c\frac{\sqrt{\mathbf{a}(y, y)}\|y\|}{\|y\|} \leqslant c\frac{\mathbf{a}(y, y)}{\|y\|} \leqslant c \sup_{v \in V_h,\ v \neq 0} \frac{\mathbf{a}(y, v)}{\|v\|} = c\|y\|_{2,h}. \tag{15}$$

Замечание 1 *Из определения* (15)*, очевидно вытекает, что*

$$\|y\| \leqslant c\|y\|_{2,h} \quad \forall\, y \in V_h. \tag{16}$$

Введем в рассмотрение взаимно сопряженные операторы $\mathcal{A}, \mathcal{A}^* : V_h \to V_h$, определяемые соотношениями

$$(\mathcal{A}y, v) = (v, \mathcal{A}^* y) = \mathbf{a}(y, v) \quad \forall\, y, v \in V_h. \tag{17}$$

Положим $\mathcal{A}_0 = \dfrac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)$, $\mathcal{A}_1 = \dfrac{1}{2}(\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)$

Лемма 2 *Справедливы неравенства*

$$\mathring{\gamma}_1\, (y, y) \leqslant (\mathcal{A}_0 y, y) \leqslant \mathring{\gamma}_2\, (y, y) \quad \forall\, y \in V_h, \tag{18}$$

$$\|\mathcal{A}_1\| \leqslant \mathring{\gamma}_3, \tag{19}$$

где $\mathring{\gamma}_1 = c_1$, $\mathring{\gamma}_2 = c_2 h^{-2}$, $\mathring{\gamma}_3 = c_3 h^{-1}$.

Доказательство. Неравенства (18) непосредственно вытекают из очевидного тождества

$$(\mathcal{A}_1 y, y) = 0 \quad \forall y \in V_h,$$

оценок (5), (6) и обратного неравенства (9). Неравенство (19) получается последовательным применением (14), (9).

Введем в рассмотрение оператор $I_h : V_h \to V_h$ при помощи тождества

$$(I_h y, v) = h^n y^h \cdot v^h \quad \forall\, y, v \in V_h.$$

Определим так называемую сеточную норму на пространстве V_h как энергетическую норму оператора I_h:

$$\|y\|_{I_h}^2 = (I_h y, y) \quad \forall\, y \in V_h.$$

Вследствие (10) справедливы оценки

$$\gamma_1 (y, y)_{I_h} \leqslant (I_h^{-1} \mathcal{A}_0 y, y)_{I_h} \leqslant \gamma_2 (y, y)_{I_h} \quad \forall\, y \in V_h,$$

$$\|I_h^{-1} \mathcal{A}_1\|_{I_h} \leqslant \gamma_3,$$

где $\gamma_1 = \bar{c}_1$, $\gamma_2 = \bar{c}_2 h^{-2}$, $\gamma_3 = \bar{c}_3 h^{-1}$, постоянные $\bar{c}_i$ очевидным образам определяются по c_i и c из оценок (10).

Лемма 3 ([11], с. 290) *Пусть* $\overline{\tau}_0 = \tau_0(1 - \varkappa \overline{\rho}_0)$, *где*

$$\tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \;\; \varkappa = \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_3^2 + \gamma_1 \gamma_2}}, \; \overline{\rho}_0 = \frac{1 - \overline{\xi}}{1 + \overline{\xi}}, \; \overline{\xi} = \frac{1 - \varkappa}{1 + \varkappa} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Тогда $\|E - \overline{\tau}_0 I_h^{-1} \mathcal{A}\|_{I_h} \leqslant \overline{\rho}_0 < 1$, *где* E *– единичный оператор.*

Лемма 4 *Если* $\|E-\tau\mathcal{A}\|\leqslant 1$, $\theta\in[0,1]$, *то* $\|E-\theta\tau\mathcal{A}\|\leqslant 1$.

Доказательство леммы немедленно вытекает из представления

$$E-\theta\tau\mathcal{A}=(1-\theta)E+\theta(E-\tau\mathcal{A}).$$

При доказательстве следующей леммы будет существенно использована теорема Неймана из теории операторных функций в гильбертовом пространстве (см., например, [12, с. 461], [13, с. 420]). Приведем ее формулировку.

Теорема 1 *Пусть функция* $u(z)$ *– функция комплексного переменного* z*, голоморфная в области, охватывающей круг* $C_1=\{z:|z|\leqslant 1\}$*; пусть, кроме того,* $|u(z)|\leqslant 1$ *на* C_1*. Тогда* $\|u(T)\|\leqslant 1$*, каков бы ни был ограниченный линейный оператор, с нормой* $\|T\|\leqslant 1$ *в гильбертовом пространстве* H*.*

Лемма 5 *Пусть* $\overline{\tau}_1=\overline{\tau}_0/2$*. Тогда для любого целого* $\nu\geqslant 1$

$$\|I_h^{-1}\mathcal{A}(E-\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu\|_{I_h}\leqslant 1/\overline{\tau}_1\sqrt{e\nu}. \tag{20}$$

Доказательство. Положим $B=E-2\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A}=E-\overline{\tau}_0 I_h^{-1}\mathcal{A}$. Тогда

$$I_h^{-1}\mathcal{A}=(2\overline{\tau}_1)^{-1}(E-B),\ E-\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A}=2^{-1}(E+B),$$

$$I_h^{-1}\mathcal{A}(E-\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu=\overline{\tau}_1^{-1}2^{-(\nu+1)}(E-B)(E+B)^\nu,$$

причем $\|B\|_{I_h}<1$. Покажем, что

$$\|(E-B)(E+B)^\nu\|_{I_h}\leqslant 2^{\nu+1}/\sqrt{e\nu}. \tag{21}$$

В соответствии с теоремой Неймана и принципом максимума для голоморфных функций достаточно установить, что

$$\max_{|z|=1}|(1-z)(1+z)^\nu|\leqslant 2^{\nu+1}/\sqrt{e\nu}.$$

Полагая $z=e^{i\varphi}$, получим $|(1-z)(1+z)^\nu|^2=2^{\nu+1}(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)^\nu$. Далее, нетрудно убедиться, что

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1}(1-t)(1+t)^\nu=\frac{2^{\nu+1}}{\nu(1+1/\nu)^{\nu+1}}<2^{\nu+1}/e\nu.$$

Замечание 2 *Понятно, что применение теоремы Неймана требует очевидного расширения оператора B на пространство комплексных векторов. Подробнее по этому поводу см., например,* [13, гл. VI].

Замечание 3 *Нетрудно видеть, что*

$$\frac{h^2}{\overline{\tau}_1} = \frac{2h^2}{\tau_0(1-\varkappa\rho_0)} \leqslant \frac{2h^2}{\tau_0(1-\varkappa)} = \frac{h^2(\gamma_1+\gamma_2)}{1-\varkappa} = \frac{\bar{c}_1 h^2 + \bar{c}_2}{1-\bar{c}_3/\sqrt{\bar{c}_3^2+\bar{c}_1\bar{c}_2}},$$

т.е.

$$c_5 h^2 \leqslant \tau \leqslant c_6 h^2. \tag{22}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\bar{\rho}_0 \leqslant 1 - ch^2. \tag{23}$$

Замечание 4 *Доказательство леммы* 5 *совпадает, в основном, с доказательством леммы Реускена* (*см.* [3,4]) , *однако использование техники гильбертовых пространств позволило нам несколько улучшить оценку нормы оператора* $I_h^{-1}\mathcal{A}(E-\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu$, *а также сделать доказательство оценки нормы оператора* $(E-B)(E+B)^\nu$ *более простым и прозрачным. Как известно* (*см., например,* [3,4]), *существенное улучшение оценок типа* (20) *достигается в случае, когда* $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$, *т. е. когда* $\gamma_3 = 0$. *Действительно, в рассматриваемой нами ситуации это приводит к тому, что* $B = B^*$ *в энергетическом пространстве оператора* I_h, *и поскольку* $\|B\|_{I_h} < 1$, *то* $\mathrm{sp}(B) \subset (-1,1)$, *следовательно,*

$$\|(E-B)(E+B)^\nu\|_{I_h} = \max_{t\in\mathrm{sp}(B)} (1-t)(1+t)^\nu \leqslant 2^{\nu+1}/e\nu.$$

Таким образом, при $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*$

$$\|I_h^{-1}\mathcal{A}(E-\overline{\tau}_1 I_h^{-1}\mathcal{A})^\nu\|_{I_h} \leqslant 2/\tau_0 e\nu.$$

3. Двусеточный метод. Исследование сходимости

Опишем и исследуем сначала так называемый двусеточный метод решения задачи (11). Введем в рассмотрение триангуляцию $\mathcal{T}_{h_1}$ области Ω

такую, что $V_{h_1} \subset V_h$. Понятно, что триангуляция $\mathcal{T}_h$ должна при этом получаться как измельчение триангуляции $\mathcal{T}_{h_1}$. В дальнейшем будем полагать, что

$$h_1 \leqslant ch. \tag{24}$$

Введем в рассмотрение нелинейный оператор $F : V_h \to V_h$ при помощи соотношения

$$(F(u), v) = \int\limits_{\Omega} f(x, u) v dx \quad \forall\, u, v \in V_h. \tag{25}$$

Пусть $y^0 \in V_h$ – заданное начальное приближение к решению задачи (11). Построим последовательность приближений $y^1, y^2, \ldots \in V_h$ по следующему правилу.

1. Если y^k уже найдено, положим $y^{k,0} = y^k$ и вычислим $y^{k,\nu}$, $\nu \geqslant 1$ (используя итерационный метод Якоби) при помощи соотношений

$$y^{k,j+1} = y^{k,j} - \tau I_h^{-1}(\mathcal{A} y^{k,j} + F(y^{k,j})), \quad j = 0, 1, \ldots, \nu - 1. \tag{26}$$

2. Найдем $w \in V_{h_1}$, решив уравнение

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w, v) + \mathbf{f}(y^{k,\nu} + w, v) = 0 \quad \forall\, v \in V_{h_1}. \tag{27}$$

3. Положим $\tilde{y}^{k,0} = y^{k,\nu} + w$ и вычислим $\tilde{y}^{k,\mu}$, $\mu \geqslant 0$ при помощи соотношений

$$\tilde{y}^{k,j+1} = \tilde{y}^{k,j} - \tau I_h^{-1}(\mathcal{A} \tilde{y}^{k,j} + F(\tilde{y}^{k,j})), \quad j = 0, 1, \ldots, \mu - 1. \tag{28}$$

4. Положим

$$y^{k+1} = \tilde{y}^{k,\mu}. \tag{29}$$

Замечание 5 *Матрица оператора I_h диагональна в выбранном выше базисе пространства V_h, поэтому $y^{k,\nu}$, $\tilde{y}^{k,\mu}$ находятся по явным формулам. На практике вместо метода Якоби часто используют более сложные итерационные процедуры, например, метод Зейделя. Вычислительные эксперименты показывают, что при этом можно добиться значительного увеличения скорости сходимости. Однако получение теоретических оценок скорости сходимости и описание способов выбора итерационных параметров при этом существенно усложняется.*

Замечание 6 *Предполагается, что уравнение (27) решается точно. Более подробно по этому поводу см. ниже замечание 7.*

Теорема 2 *Существуют $\tau > 0$, $\nu \geqslant 1$ $h_0 > 0$ такие, что при $h \leqslant h_0$*

$$\|y^{k+1} - y\| \leqslant q_1 \|y^k - y\|, \tag{30}$$

где y – решение задачи (11), $q_1 \in (0,1)$ – постоянная, не зависящая от h.

Доказательство. По предположению $V_{h_1} \subset V_h$, поэтому из (11), (27) вытекает, что

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, v) + \mathbf{f}(y^{k,\nu} + w), v) - \mathbf{f}(y, v) = 0 \quad \forall\, v \in V_{h_1}. \tag{31}$$

Вследствие (5), (7)

$$\|y^{k,\nu} + w - y\|_1^2 \leqslant c(\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, y^{k,\nu} + w - y) + \\ + \mathbf{f}(y^{k,\nu} + w), y^{k,\nu} + w - y) - \mathbf{f}(y, y^{k,\nu} + w - y)). \tag{32}$$

Используя (31), получим, что правая часть (32) равна

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, y^{k,\nu} - y) + \mathbf{f}(y^{k,\nu} + w), y^{k,\nu} - y) - \mathbf{f}(y, y^{k,\nu} - y)).$$

и потому (см. (12), (7), (13), (16))

$$\|y^{k,\nu} + w - y\|_1^2 \leqslant c\|y^{k,\nu} + w - y\| \|y^{k,\nu} - y\|_{2,h}. \tag{33}$$

Следуя [2, с. 243], положим для $x \in \Omega$

$$b_k(x) = \begin{cases} (f(x, z + y^{k,\nu}) - f(x, w + y^{k,\nu}))/(z - w), & z - w \neq 0, \\ 0, \quad z - w = 0, \end{cases} \tag{34}$$

где $z = y - y^{k,\nu}$, и введем в рассмотрение функцию $\xi \in H_0^1(\Omega)$ как решение задачи

$$\mathbf{a}(v, \xi) + (b_k \xi, v) = (z - w, v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{35}$$

По построению $0 \leqslant b_k(x) \leqslant c_3$ на Ω, поэтому задача (35) имеет единственное решение из $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ (см., например, [7]). Определим, далее, функцию $\xi^h \in V_{h_1}$ как решение задачи

$$\mathbf{a}(v, \xi^h) + (b_k \xi^h, v) = (z - w, v) \quad \forall\, v \in V_{h_1}. \tag{36}$$

Из хорошо известных результатов общей теории метода конечных элементов, основанных на приеме Обэна – Нитше (см., например, [9,10]), вытекает, что

$$\|\xi - \xi^h\|_1 \leqslant ch\|z - w\|. \tag{37}$$

Положив $v = z - w$ в (35), получим

$$\mathbf{a}(z - w, \xi) + (f(x, z + y^{k,\nu}) - f(x, w + y^{k,\nu}), \xi) = \|z - w\|^2. \tag{38}$$

Принимая теперь $v = \xi^h$ в (31) и складывая полученное равенство с (38), будем иметь

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w - y, \xi^h - \xi) + (f(x, w + y^{k,\nu}) - f(x, y), \xi^h - \xi) = \|z - w\|^2. \tag{39}$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что

$$\|z - w\|^2 \leqslant c\|\xi - \xi^h\|_1\|z - w\|_1. \tag{40}$$

Вследствие (37), (40) имеем

$$\|z - w\| \leqslant ch\|z - w\|_1, \tag{41}$$

откуда на основании (33) получаем

$$\|y^{k,\nu} + w - y\|_1 \leqslant ch\|y^{k,\nu} - y\|_{2,h}. \tag{42}$$

Вновь применяя (41), можем написать

$$\|y^{k,\nu} + w - y\| \leqslant ch^2\|y^{k,\nu} - y\|_{2,h}. \tag{43}$$

Заметим теперь, что непосредственно из определений (12), (17) и неравенства (43) вытекает оценка

$$\|y^{k,\nu} + w - y\| \leqslant ch^2\|\mathcal{A}(y^{k,\nu} - y)\|. \tag{44}$$

Ведем в рассмотрение операторы $G_j : V_h \to V_h$, определяемые соотношениями

$$(G_j z, v) = \int\limits_\Omega g_j(x) z(x) v(x) dx \quad \forall\, z, v \in V_h, \tag{45}$$

где

$$g_j(x) = \begin{cases} (f(x, y^{j,\nu}) - f(x, y))/(y^{j,\nu} - y), & y^{j,\nu} - y \neq 0, \\ 0, \quad y^{j,\nu} - y = 0, \end{cases} \tag{46}$$

$j = 0, 1, \dots, \nu - 1$.

Понятно, что операторы G_j самосопряжены, неотрицательны и

$$\|G_j\| \leqslant c_3, \quad j = 0, 1, \dots, \nu - 1. \tag{47}$$

Нетрудно убедиться, что из (26) вытекает представление

$$\mathcal{A}(y^{k,\nu} - y) = \mathcal{A}(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_{\nu-1}))(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_{\nu-2}))\cdots$$
$$\cdots(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_0))(y^k - y). \tag{48}$$

Заметим далее, что

$$(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_{\nu-1}))(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_{\nu-2}))\cdots$$
$$\cdots(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_0)) = (E - I_h^{-1}\tau\mathcal{A})^{\nu} - (E - I_h^{-1}\tau\mathcal{A})^{\nu-1}\tau G_0 -$$
$$-(E - I_h^{-1}\tau\mathcal{A})^{\nu-2}\tau G_1(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_0)) - \dots$$
$$-\tau G_{\nu-1}(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_{\nu-2}))\cdots(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_0)). \tag{49}$$

Таким образом,

$$h^2\|\mathcal{A}(y^{k,\nu} - y)\| \leqslant \Big(\tau^{-1}h^2\|\tau\mathcal{A}(E - I_h^{-1}\tau\mathcal{A})^{\nu}\| + h^2\|\tau\mathcal{A}(E - I_h^{-1}\tau\mathcal{A})^{\nu-1}\|\|G_0\| +$$
$$+\|\tau\mathcal{A}(E - I_h^{-1}\tau\mathcal{A})^{\nu-2}\|h^2\|G_1\|\|(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_0)\| + \dots +$$
$$+\tau\|\mathcal{A}\|h^2\|G_{\nu-1}\|\|(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_{\nu-2}))\|\cdots\|(E - I_h^{-1}\tau(\mathcal{A} + G_0)\|\Big)\times$$
$$\times\|y^k - y\|. \tag{50}$$

Используя установленные выше свойства операторов $\mathcal{A}$, G_j, леммы 3–5 и замечание 3, нетрудно показать, что существуют τ_1, τ_2 такие, что

$$\|\tau_1\mathcal{A}(E - I_h^{-1}\tau_1\mathcal{A})^j\| \leqslant 1/\sqrt{ej}, \tag{51}$$

$$\|(E - I_h^{-1}\tau_2(\mathcal{A} + G_j)\| \leqslant 1 - c_4h^2 \tag{52}$$

$j = 1, 2, \dots, \nu - 1$.

Учитывая теперь еще раз замечание 3, получим, что при

$$\tau = \min(\tau_1, \tau_2) \tag{53}$$

первый множитель в правой части (50) оценивается величиной

$$q_1 = c\Big(\frac{1}{\sqrt{\nu}} + \frac{1}{\sqrt{\nu - 1}}\, c_4h^2 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\nu-2}}\,c_4h^2(1-c_4h^2)+\ldots+c_4h^2(1-c_4h^2)^{\nu-1}\Big). \tag{54}$$

Нетрудно убедиться, что при $j \geqslant 1$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} x(1-x)^j \leqslant 1/ej, \tag{55}$$

поэтому при $h \leqslant 1/c_4$

$$q_1 \leqslant c\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}+\sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{1}{(\nu-k)\sqrt{k}}\right). \tag{56}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{1}{(\nu-k)\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{\nu}\sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{1}{(\nu-k)k} = \frac{2}{\sqrt{\nu}}\sum_{k=1}^{\nu-1}\frac{1}{k} \to 0 \tag{57}$$

при $\nu \to \infty$ и, таким образом, $q_1 < 1$ при достаточно больших ν. Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что вследствие оценки (52) итерации (28) не увеличивают погрешности.

4. W-цикл решения задачи (11)

Используя результаты, полученные при изучении двусеточного метода, можно конструировать и исследовать различные варианты многосеточных процедур решения эллиптических уравнений (см. [1–4]).

Мы проведем, опираясь на теорему 2, построение и обоснование сходимости так называемого W-цикла многосеточного метода решения задачи (11).

Введем в рассмотрение совокупность триангуляций $\mathcal{T}_{h_0}, \mathcal{T}_{h_1}, \ldots, \mathcal{T}_{h_l} = \mathcal{T}_h$, $l \geqslant 1$, области Ω. Предполагается, что каждая последующая триангуляция связана с предыдущей так же, как триангуляции $\mathcal{T}_h$, $\mathcal{T}_{h_1}$ в п. 2. Тогда для соответствующих конечноэлементных пространств, построенных в соответствии с п. 2, справедливы включения $V_{h_0} \subset V_{h_1} \subset \ldots \subset V_{h_l}$.

Для наглядности при описании W-цикла и исследовании его сходимости ограничимся случаем $l = 2$.

Пусть $y^0 \in V_{h_2}$ – заданное начальное приближение к y, решению задачи (11) при $V_h = V_{h_2}$. Построим последовательность приближений $y^1, y^2, \ldots \in V_{h_2}$ по следующему правилу.

1. Если y^k уже найдено, положим $y^{k,0} = y^k$ и вычислим $y^{k,\nu}$, $\nu \geqslant 1$ (используя итерационный метод Якоби) при помощи соотношений

$$y^{k,j+1} = y^{k,j} - \tau I_h^{-1}(\mathcal{A}y^{k,j} + F(y^{k,j})), \quad j = 0, 1, \ldots, \nu - 1. \tag{58}$$

2. Найдем $\tilde{w} \in V_{h_1}$, выполнив две итерации двусеточного метода (26)–(29) применительно к задаче: найти $w \in V_{h_1}$ такое, что

$$\mathbf{a}(y^{k,\nu} + w, v) + \mathbf{f}(y^{k,\nu} + w, v) = 0 \quad \forall\, v \in V_{h_1}. \tag{59}$$

Начальное приближение к w при этом полагается равным нулю.

3. Положим $\tilde{y}^{k,0} = y^{k,\nu} + \tilde{w}$ и вычислим $\tilde{y}^{k,\mu}$, $\mu \geqslant 0$ при помощи соотношений

$$\tilde{y}^{k,j+1} = \tilde{y}^{k,j} - \tau I_h^{-1}(\mathcal{A}\tilde{y}^{k,j} + F(\tilde{y}^{k,j})), \quad j = 0, 1, \ldots, \mu - 1. \tag{60}$$

4. Положим

$$y^{k+1} = \tilde{y}^{k,\mu}. \tag{61}$$

Замечание 7 *Предполагается, при реализации, описываемого метода уравнение, аналогичное* (59), *в пространстве* V_{h_0} *решается точно. Указанное уравнение нелинейно, поэтому на практике для его решения используется некоторый итерационный метод с достаточно большим числом итераций, что не обременительно, если сетка самого нижнего уровня выбирается достаточно грубой. Понятно, что если функция* f *линейна по второму аргументу, то для решения соответствующего уравнения на сетке нижнего уровня целесообразно применять какой-либо прямой метод.*

Теорема 3 *Пусть параметр* τ *в* (59), (60) *выбран как указано в* (51)–(53), *выполнено неравенство* $q_1 \leqslant 0.54$ *для знаменателя скорости сходимости двусеточного метода (см.* (30)[2]). *Тогда для итерационного метода* (59)–(61) *выполнена оценка скорости сходимости*

$$\|y^{k+1} - y\| \leqslant q_2 \|y^k - y\|, \tag{62}$$

где $q_2 \in (0, 1)$ *– постоянная, не зависящая от* h_2.

[2]Напомним, что q_1 может быть сделано как угодно малым за счет выбора параметра ν двусеточного итерационного метода.

Доказательство. Имеем

$$\|y^{k,\nu} + \tilde{w} - y\| \leqslant \|y^{k,\nu} + w - y\| + \|\tilde{w} - w\|. \tag{63}$$

Считая ν достаточно бошьим и используя полученную при доказательстве теоремы 2 оценку скорости сходимости двусеточного итерационного, метода можно написать, что

$$\|y^{k,\nu} + w - y\| \leqslant q_1 \|y^k - y\|. \tag{64}$$

Точно так же, поскольку w строится в результате двух итераций двусеточного итерационного метода с нулевым начальным приближением, то

$$\|\tilde{w} - w\| \leqslant q_1^2 \|w\|. \tag{65}$$

Вследствие (52) имеем $\|y^{k,\nu} - y\| \leqslant \|y^k - y\|$, поэтому

$$\|w\| = \|y^{k,\nu} + w - y - (y^{k,\nu} - y)\| \leqslant$$

$$\leqslant \|y^{k,\nu} + w - y\| + \|y^{k,\nu} - y\| \leqslant (1 + q_1)\|y^k - y\|. \tag{66}$$

Из (63)–(66) вытекает, что

$$\|y^{k,\nu} + \tilde{w} - y\| \leqslant q_2 \|y^k - y\|, \tag{67}$$

где

$$q_2 \leqslant q_1 + q_1^2(1 + q_1). \tag{68}$$

Поскольку итерации (60) не увеличивают погрешности, то из (66) получаем

$$\|y^{k+1} - y\| \leqslant q_2 \|y^k - y\|.$$

Элементарный анализ корней полинома $P_3(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ показывает, что $q_2 \in (0, 1)$ при $q_1 \in (0, 0.54)$.

Описание и анализ W-цикла при произвольном $l \geqslant 1$ выполняется аналогично (см. [3]). При этом, обозначая через q_s коэффициент сокращения погрешности на пространстве V_{h_s}, нетрудно получить рекуррентную формулу

$$q_{s+1} \leqslant q_1 + q_s^2(1 + q_1), \quad s = 0, \dots, l - 1,\ q_0 = 0, \tag{69}$$

обобщающую (68). Неравенство (69) принадлежит к классу разностных неравенств, исследованных в [14]. Как показано в [14], последовательность q_s, $s = 0, 1, 2 \ldots$, определенная рекуррентным соотношением (69), при

$$q_1 \in (0, (\sqrt{2} - 1)/2], \tag{70}$$

монотонно возрастая, стремится к величине

$$\rho_1 = (1 - \sqrt{1 - 4(1 + q_1)q_1})/(2(1 + q_1)) < 1.$$

Таким образом, выполнение условия (70) гарантирует сходимость W-цикла при любом числе слоев $l \geqslant 1$. Справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$\|y^{k+1} - y\| \leqslant \rho_1 \|y^k - y\|. \tag{71}$$

Важно подчеркнуть, что скорость сходимости рассматриваемого варианта многосеточного метода не зависит от параметра триангуляции h. Отметим также, что оценки (70), (71) уточняют результаты о сходимости W-цикла, полученные в [3, с. 232].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 11-01-00667, 12-01-00955, 12-01-97022.

Список литературы

[1] *Hackbusch W.* Multi-Grid Methods and Applications. – Berlin: Springer, 1985. – 377 p.

[2] *Шайдуров В.В.* Многосеточные методы конечных элементов. – М.: Наука, 1989. – 288 с.

[3] *Braess D.* Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie. – Berlin: Springer, 2003. – 342 S.

[4] *Ольшанский М.А.* Лекции и упражнения по многосеточным методам. – М.: Физматлит, 2005. – 176 с.

[5] *Карчевский М.М.* О сходимости многосеточного метода для эллиптических уравнений второго порядка // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 3. – С. 154–161

[6] *Карчевский М.М.* О многосеточном методе для слабонелинейных эллиптических уравнений второго порядка // Известия вузов. Математика. – 2011, № 3. – С. 10–19.

[7] *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

[8] *Карчевский М.М., Павлова М.Ф.* Уравнения математической физики. Дополнительные главы. – Казань: Изд-во Казан. гос. ун-та. – 2008, 228 с.

[9] *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

[10] *Даутов Р.З., Карчевский М.М.* Ведение в теорию метода конечных элементов. – Казань: Казанский университет, 2011. – 240 с.

[11] *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

[12] *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588 с.

[13] *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969.

[14] *Карчевский М.М.* Об одном классе разностных неравенств // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2011, вып. 27, с. 132–133.